

# FÍSICA XERAL I

## GRAO EN FÍSICA



- 1 Campos escalares y vectoriales
- 2 Gradiente de un campo escalar
- 3 Circulación de un campo vectorial
- 4 Flujo y divergencia de un campo vectorial. Teorema de Gauss. Campos solenoidales
- 5 Rotacional de un campo vectorial. Teorema de Stokes. Campos conservativos

## 1. Campos escalares y vectoriales

### • Concepto de campo

Se dice que en una región del espacio existe un **campo** cuando a cada punto de esa región se le puede asignar un **valor único** de determinada magnitud.

En el caso de que la magnitud sea un **escalar** se dirá que se trata de un **campo escalar**. Por el contrario, si la magnitud tiene carácter **vectorial** diremos que se trata de un **campo vectorial**.

### • Campo escalar

Los campos escalares se visualizan mediante las superficies de nivel.

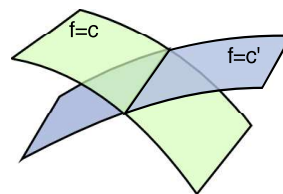
Se denomina **superficie de nivel** o **superficie isoescalar** al lugar geométrico de los puntos del espacio en que el escalar toma el mismo valor.

Si  $f(x, y, z)$  es la función que asigna a cada punto del espacio  $P(x, y, z)$  un escalar, matemáticamente una superficie isoescalar se representa por la ecuación

$$f(x, y, z) = cte$$

- ▶ Dos superficies de nivel no pueden cortarse.

Si ésto fuese posible, en los puntos de corte se verificaría simultáneamente las dos ecuaciones  $f(x, y, z) = c$  y  $f(x, y, z) = c'$  lo cual iría en contra de la definición única de punto.

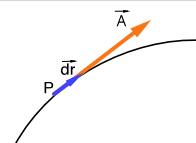


### • Campo vectorial

Los campos vectoriales se visualizan mediante las líneas vectoriales.

Se denomina **línea vectorial** o **línea de campo** a aquella línea que en cada punto del espacio es tangente al vector campo.

Esto significa que en cada punto  $P$ , el vector desplazamiento  $\vec{dr}$  según la línea de campo y el vector campo,  $\vec{A}$ , son paralelos y por lo tanto



$$A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} = \lambda(dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k})$$

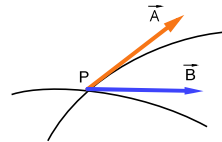
es decir,  $\vec{A}$  y  $d\vec{r}$  son proporcionales, verificándose

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

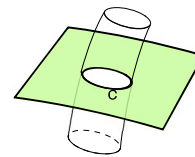
que es la expresión diferencial de las líneas de campo.

- Dos líneas de campo no pueden cortarse.

De ser posible, en el punto de corte tendríamos dos valores distintos del campo lo cual contradice que sea una función única de punto.



Si suponemos una superficie en el espacio y trazamos en ella una línea cerrada  $C$ , se denomina **tubo vectorial** al conjunto de líneas de campo que se apoyan en dicho contorno así como las que pasan por su interior.



## 2. Gradiente de un campo escalar

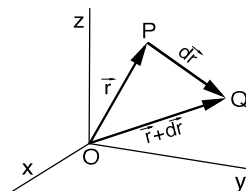
Supongamos una región donde está definido un campo escalar  $U(x, y, z)$  y sean  $P$  y  $Q$  dos puntos infinitamente próximos.

Al pasar de  $P$  a  $Q$  la función  $U$  habrá variado en

$$dU = U(x + dx, y + dy, z + dz) - U(x, y, z)$$

que matemáticamente puede expresarse en la forma

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$



y como el vector desplazamiento es  $\vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ , resulta

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

Al vector

$$\mathbf{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \quad (1)$$

se le denomina **gradiente** del campo escalar U.

Resulta que, el gradiente es el vector que multiplicado escalarmente por el vector desplazamiento nos da la variación de la función escalar

$$dU = \mathbf{grad}U \cdot \vec{dr} \quad (2)$$

El vector gradiente puede representarse también en la forma

$$\mathbf{grad}U = \nabla U$$

siendo, en coordenadas cartesianas,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (3)$$

el **operador nabla**.

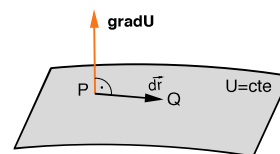
- Dirección del vector gradiente

Desplacémonos sobre una superficie isoescalar,  $U=\text{cte}$ , entre dos puntos infinitamente próximos P y Q.

Al ser  $U=\text{cte} \Rightarrow dU=0$ , y de la ecuación (2) obtenemos

$$0 = \mathbf{grad}U \cdot \vec{dr}$$

es decir,  $\mathbf{grad}U$  y  $\vec{dr}$  son perpendiculares.

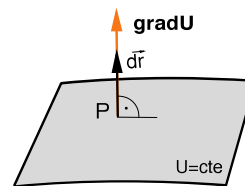


La dirección del gradiente es, en cada punto, perpendicular a la superficie de nivel que pase por dicho punto.

► Sentido del vector gradiente

Si nos desplazamos en el mismo sentido del vector  $\text{grad}U$ , tendremos según (2)

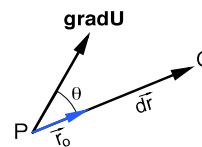
$$\begin{aligned} dU &= \text{grad}U \cdot \vec{dr} \\ &= |\text{grad}U| |\vec{dr}| \cos 0 > 0 \end{aligned}$$



La sentido del vector gradiente es el de crecimiento de la función escalar correspondiente.

► Derivada direccional

Supongamos que nos desplazamos desde el punto P al Q, infinitamente próximos, formando un ángulo  $\theta$  con  $\text{grad}U$



La variación que experimenta la función escalar será, de acuerdo con la ecuación (2)

$$dU = \text{grad}U \cdot \vec{dr} = \text{grad}U \cdot \vec{r}_0 |\vec{dr}|$$

en donde  $\vec{r}_0$  es un vector unitario,  $|\vec{r}_0| = 1$ , en la dirección y sentido del desplazamiento.

Al término

$$\frac{dU}{|\vec{dr}|} = \text{grad}U \cdot \vec{r}_0 \quad (4)$$

se le denomina **derivada direccional** del campo, e indica la variación de la función escalar por unidad de desplazamiento al movernos en la dirección determinada por  $\vec{r}_0$ .

La derivada direccional no es más que la proyección del vector gradiente en la dirección dada por  $\vec{r}_0$ . La ecuación (4) también puede escribirse como

$$\frac{dU}{|dr|} = |\text{grad}U| \cos \theta$$

Cuando  $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = 1$ , la derivada direccional toma el valor máximo

$$\left( \frac{dU}{|d\vec{r}|} \right)_{\text{máx}} = |\text{grad}U| \quad (5)$$

la **derivada direccional máxima** coincide con el módulo del gradiente.

La expresión (5) permite establecer que la dirección del gradiente es aquella en la que la función escalar experimenta la máxima variación.

### Ejemplo 1

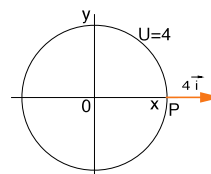
Dada la función escalar  $U = x^2 + y^2$ , calcular el vector gradiente en el punto P(2,0).

Apliquemos la ecuación (1) para calcular el gradiente

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y; \quad \text{grad}U = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

y en el punto P(2,0) toma el valor  $\text{grad}U = 4\vec{i}$

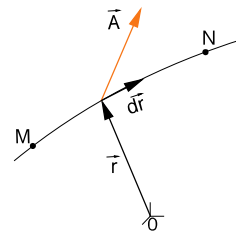
En la figura representamos la isoescalar  $U=4$  que es una circunferencia de radio 2, y el vector gradiente en el P(2,0)



Como podemos ver, el gradiente es perpendicular a la curva de nivel en P(2,0) y de sentido el de crecimiento de U.

### 3. Circulación de un campo vectorial

Consideremos una trayectoria cualquiera MN en una región del espacio en la que está definido un campo vectorial  $\vec{A}$ , y sea  $d\vec{r}$  el vector desplazamiento en el sentido de recorrido de la trayectoria



Se denomina *circulación elemental* del campo  $\vec{A}$  al producto escalar

$$dC = \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (6)$$

y *circulación* del campo  $\vec{A}$  a lo largo del camino finito MN, a la integral

$$C = \int_M^N \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (7)$$

El valor de esta integral depende, en general, de la curva que estamos considerando y de los puntos M y N.

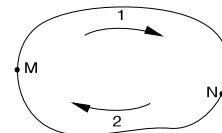
Un caso de especial interés en Física es aquel en que  $\vec{A} = \text{grad}U$ . Si sustituimos este valor de  $\vec{A}$  en la expresión (7), tendremos

$$C = \int_M^N \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_M^N \text{grad}U \cdot d\vec{r} = \int_M^N dU = U_N - U_M \quad (8)$$

donde hemos tenido en cuenta la ecuación (2). El resultado pone de manifiesto que el valor de la circulación depende solamente de los estados inicial y final, y no depende de la trayectoria.

Supongamos ahora una trayectoria cerrada.  
La circulación en dicha curva viene dada por

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (9)$$



Vamos a expresar esta integral cerrada como suma de dos integrales abiertas

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{M(1)}^N \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{N(2)}^M \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (10)$$

En general, el valor de esta integral es distinto de cero.

Si particularizamos la expresión anterior al caso de que  $\vec{A} = \text{grad}U$ , resulta

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{M(1)}^N \text{grad}U \cdot d\vec{r} + \int_{N(2)}^M \text{grad}U \cdot d\vec{r} \quad (11a)$$

$$= (U_N - U_M) + (U_M - U_N) = 0 \quad (11b)$$

Escribamos ahora la ecuación (10) de otra forma. Para ello, tendremos en cuenta que

$$\int_{N(2)}^M \vec{A} \cdot d\vec{r} = - \int_{M(2)}^N \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

y por lo tanto

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{M(1)}^N \vec{A} \cdot d\vec{r} - \int_{M(2)}^N \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (12)$$

En el caso de que  $\vec{A} = \text{grad}U$ , y de acuerdo con el resultado (11b)

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{M(1)}^N \vec{A} \cdot d\vec{r} - \int_{M(2)}^N \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$$

es decir

$$C = \int_{M(1)}^N \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{M(2)}^N \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (13)$$

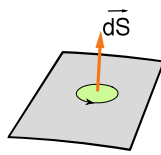
Podemos establecer que, si un campo  $\vec{A}$  deriva de una cierta magnitud escalar  $U$  a través del gradiente,  $\vec{A} = \text{grad}U$ , se verifica:

- su circulación a lo largo de una trayectoria cerrada cualquiera es siempre nula, ecuación (11b)
- la circulación entre dos puntos  $M$  y  $N$  cualesquiera, sólo depende de la posición de éstos y no del camino seguido, ecuación (13)

#### 4. Flujo y divergencia de un campo vectorial. Teorema de Gauss. Campos solenoidales

##### • Representación de superficies

Por convenio, un **elemento de superficie**,  $d\vec{S}$ , se representa por un **vector**, de **módulo** igual al área del elemento de superficie, **dirección** normal al plano que contiene a dicho elemento de superficie, y de **sentido**:



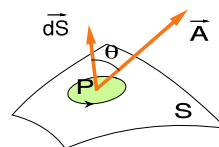
- ▶ si está situado sobre una superficie abierta el de avance de un tornillo dextrógiro que gire en el sentido que previamente hayamos fijado sobre el contorno del elemento de superficie.
- ▶ si está situado sobre una superficie cerrada hacia el exterior de la superficie cerrada.

● Flujo de un campo vectorial

Supongamos que en una región del espacio existe un campo vectorial  $\vec{A}$ . Consideremos en esa región una superficie abierta finita  $S$  y sea  $P$  un punto cualquiera de esa superficie. Tracemos entorno a  $P$  un elemento de superficie  $d\vec{S}$ .

Se define **flujo elemental** del campo  $\vec{A}$  a través del elemento de superficie  $d\vec{S}$

$$d\phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (14)$$



El **flujo total** a través de la superficie completa  $S$ , será

$$\phi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (15)$$

El flujo puede presentar valores positivos, negativos o nulos, dependiendo del ángulo que formen el vector campo y el vector superficie.

La expresión (14) puede integrarse para calcular el flujo en una superficie cerrada

$$\phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (16)$$

- ▶ El concepto de flujo y línea de campo están relacionados, de tal forma que podemos interpretar el flujo como una medida del número de líneas de campo que atraviesan una superficie dada.

Analizaremos a continuación el flujo a través de una superficie cerrada:

Las tres situaciones posibles son:

(a) **flujo total positivo** (salen más líneas de campo de las que entran)

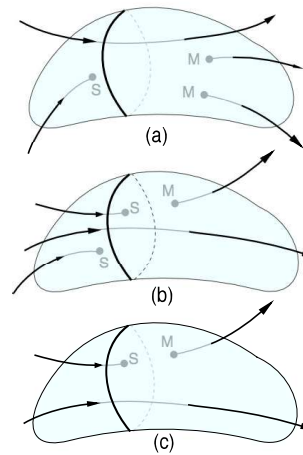
En esa región existe un balance neto de **manantiales de campo**

(b) **flujo total negativo** (entran más líneas de campo de las que salen)

Se dice entonces que en esa región existe un balance neto de **sumideros de campo**

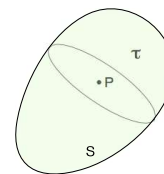
(c) **flujo total nulo** (el número líneas de campo que entran es igual al número de las que salen)

Se dice entonces que en esa región existe un balance nulo de manantiales y sumideros de campo (**flujo conservativo**).



### • Divergencia de un campo vectorial

Sea una región del espacio en la que está definido un campo vectorial  $\vec{A}$ . Sea P un punto de dicha región rodeado por una superficie cerrada S, que delimita un volumen  $\tau$ .



Se define una nueva función escalar de punto denominada **divergencia** del campo vectorial  $\vec{A}$  por

$$\text{div} \vec{A} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\tau} \quad (17)$$

### ► Deficiencia operacional

$$\text{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (18)$$

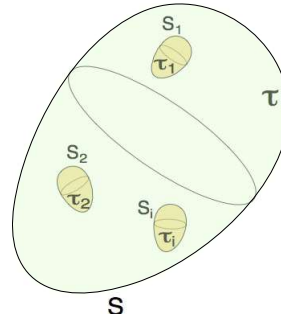
- Teorema de la divergencia o de Gauss

Dada una superficie cerrada  $S$ , que delimita un volumen  $\tau$ , se verifica para todo campo vectorial  $\vec{A}$  que

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{\tau} \text{div} \vec{A} \, d\tau \quad (19)$$

- Significado físico de la divergencia

- Sea una región del espacio de volumen  $\tau$  limitada por una superficie cerrada  $S$ .
- Según la ecuación (19), si  $\text{div} \vec{A} = 0$  en todos los puntos del volumen  $\tau$  entonces el flujo en la superficie cerrada  $S$ , que contiene a dicho volumen, será nulo.
- Para que el flujo total sea distinto de cero, debe cumplirse que  $\text{div} \vec{A} \neq 0$  en algunos puntos del interior de  $S$ .
- Sean  $\tau_i$  las zonas del interior de  $\tau$  en las que  $\text{div} \vec{A} \neq 0$ .



Como el volumen es aditivo

$$\int_{\tau} \text{div} \vec{A} \, d\tau = \sum_{i=1}^N \int_{\tau_i} \text{div} \vec{A} \, d\tau + \int_{\tau - \sum \tau_i} \text{div} \vec{A} \, d\tau$$

Pero al ser  $\text{div} \vec{A} = 0$  para todos los puntos que no pertenecen a los  $\tau_i$

$$\int_{\tau - \sum \tau_i} \text{div} \vec{A} \, d\tau = 0$$

Por lo tanto, si tenemos en cuenta el teorema de la divergencia (19)

$$\phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \phi_i \quad (20)$$

el flujo total a través de la superficie  $S$  es igual a la suma de los flujos a través de las superficies  $S_i$ , con independencia del tamaño y forma de  $S$ , siempre que sigan en su interior las mismas regiones en que  $\text{div} \vec{A} \neq 0$ .

Este resultado permite introducir la imagen física de que dentro de esas zonas en las que  $\text{div}\vec{A} \neq 0$  existe un agente, denominado **magnitud activa**, que es el causante de la existencia del campo.

Cuantitativamente, la magnitud activa se identifica con el flujo en cada una de esas regiones en las que  $\text{div}\vec{A} \neq 0$

$$M_i = \phi_i$$

- ▶ Si  $\phi_i$  es positivo,  $M_i$  es positivo: en esa región hay manantiales
- ▶ Si  $\phi_i$  es negativo,  $M_i$  es negativo: en esa región hay sumideros

La magnitud activa total dentro de la región contenida en S, será

$$M = \sum_{i=1}^N M_i$$

con independencia de sus posiciones relativas en el espacio.

Sea  $\rho$  **densidad volúmica de magnitud activa** existente en la región de volumen  $\tau_i$  en la que  $\text{div}\vec{A} \neq 0$ .

La magnitud activa  $M_i$  en ese volumen  $\tau_i$  vendrá dada por

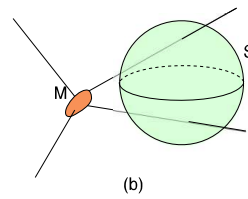
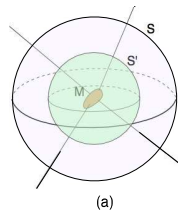
$$M_i = \int_{\tau_i} \rho \, d\tau = \oint_{S_i} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{\tau_i} \text{div}\vec{A} \, d\tau$$

y al ser idénticos los recintos de integración, implica que

$$\text{div}\vec{A} = \rho \tag{21}$$

denominada **ecuación de continuidad**. Esta ecuación permite interpretar la divergencia como la densidad volúmica de magnitud activa en cada punto del espacio.

Consideremos, finalmente, las dos situaciones que se recogen en la figura siguiente:



Si las dos superficies cerradas  $S$  y  $S'$  de la figura (a) contienen ambas en su interior la misma magnitud activa  $M$ , de acuerdo con la ecuación (20), el flujo que crea  $M$  en ambas superficies es el mismo.

Si la magnitud activa  $M$  está fuera de una superficie cerrada  $S$ , figura (b), entonces el flujo en dicha superficie es nulo ya que no contiene magnitud activa en su interior

- Campos solenoidales

Un campo vectorial  $\vec{A}$  se dice *solenoidal* si  $\text{div}\vec{A} = 0$  en todos los puntos del espacio

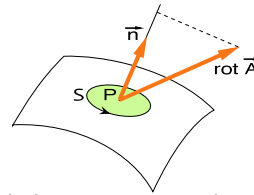
- ▶ Si  $\text{div}\vec{A} = 0$ , la ecuación (21) implica que  $\rho = 0$ . Es decir, en un campo solenoidal la densidad de magnitud activa es nula. De otra forma, no existen fuentes escalares del campo. Por lo tanto, las líneas de campo deben ser cerradas ya que no existen ni manantiales ni sumideros.
- ▶ Como  $\text{div}\vec{A} = 0$ , el teorema de Gauss (19) nos indica que el flujo en cualquier superficie cerrada es nulo.
- ▶ Si el flujo en cualquier superficie cerrada es nulo, entonces el campo es solenoidal.
- ▶ Que el flujo sea nulo en alguna superficie cerrada no implica que el campo sea solenoidal.

## 6. Rotacional de un campo vectorial. Teorema de Stokes. Campos conservativos

- Rotacional de un campo vectorial

Supongamos una región del espacio en la que está definido un campo vectorial  $\vec{A}$ .

Consideremos en esa región una superficie. Sea P un punto sobre la misma y tracemos entorno a P una curva cerrada y sea S el área de la superficie limitada por ella.



Fijemos un sentido de recorrido en el contorno de dicha curva cerrada y sea  $\vec{n}$  el vector unitario normal cuyo sentido corresponde al prefijado sobre el contorno.

Se define la función vectorial de punto denominada **rotacional** del campo  $\vec{A}$ , y que notaremos por  $rot\vec{A}$ , de tal forma que la componente del rotacional según la normal en el punto P venga dado por

$$rot\vec{A} \cdot \vec{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}}{S} \quad (22)$$

► Deficiencia operacional

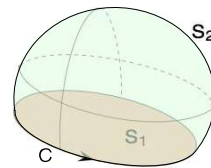
$$\begin{aligned} rot\vec{A} = \nabla \wedge \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (23) \end{aligned}$$

• Teorema del rotacional o de Stokes

Dada una superficie abierta S, limitada por una curva cerrada C, entonces para todo campo vectorial  $\vec{A}$

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S rot\vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (24)$$

La aplicación del teorema de Stokes permite afirmar que todas las superficies abiertas que se apoyen sobre el mismo contorno, tienen el mismo flujo del rotacional



$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{S_1} \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Un campo vectorial  $\vec{A}$  se denomina **irrotacional** cuando  $\text{rot}\vec{A} = 0$  en todos los puntos del espacio en que está definido el campo vectorial.

- Campos conservativos

Un campo vectorial  $\vec{A}$  se dice que es **conservativo** si deriva de una función escalar de punto a través de su gradiente

$$\vec{A} = \text{grad}U \quad (25)$$

y en consecuencia:

- ▶ la circulación del campo entre dos puntos dados es independiente del camino seguido y sólo depende de los puntos inicial y final.
- ▶ la circulación a lo largo de cualquier línea cerrada es siempre nula.

Para adecuar el problema matemático al problema físico se introduce una nueva función escalar puntual  $V(x,y,z)$  que se denomina **potencial** del campo escalar, definida por

$$V(x, y, z) = -U(x, y, z) \quad (26)$$

de forma que

Un campo vectorial  $\vec{A}$  se dice que es **conservativo** si deriva de una función potencial a través del gradiente cambiado de signo

$$\vec{A} = -\text{grad}V \quad (27)$$

Ahora la circulación del campo  $\vec{A}$  entre dos puntos será

$$\int_M^N \vec{A} \cdot d\vec{r} = - \int_M^N \text{grad}V \cdot d\vec{r} = - \int_M^N dV = V_M - V_N \quad (28)$$

resultando que la circulación es independiente del camino, y que la circulación en cualquier línea cerrada es nula.

La ecuación

$$V(x, y, z) = cte \quad (29)$$

representa una superficie **equipotencial** porque en todos los puntos de la misma el potencial toma el mismo valor.

Las propiedades del vector  $\text{grad}V$  serán las mismas que las del vector  $\text{grad}U$ .

Sin embargo, si utilizamos  $\vec{A} = \text{grad}U$ , entonces el campo  $\vec{A}$  tiene el sentido en el que la función escalar  $U$  crece; mientras que si  $\vec{A} = -\text{grad}V$ , entonces el campo  $\vec{A}$  tiene el sentido en el que la función potencial  $V$  decrece.

### Ejemplo 2

La energía potencial gravitatoria de un sistema de dos masas  $m_1$  y  $m_2$  separadas por una distancia  $r$  viene dado por

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Calcular la fuerza gravitatoria con que la masa  $m_1$  atrae a la masa  $m_2$ .

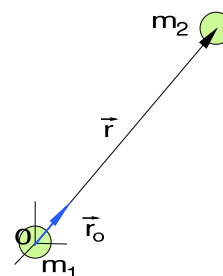
Situemos un sistema de coordenadas cartesianas con origen en la masa  $m_1$ .

El vector de posición de la masa  $m_2$  será

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

de forma que la distancia  $r$  entre las dos masas es

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$



Para calcular la fuerza gravitatoria  $\vec{F}$  aplicaremos la ecuación (27)

$$\vec{F} = -\text{grad}E_p = G m_1 m_2 \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = G m_1 m_2 \text{grad} (r^{-1})$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x$$

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2y$$

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial z} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2z$$

resulta

$$\text{grad} (r^{-1}) = - (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

es decir

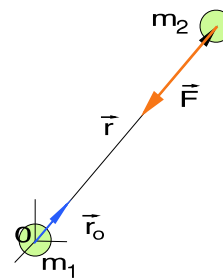
$$\text{grad} (r^{-1}) = -r^{-3} \vec{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{r}_o}{r^2}$$

siendo  $\vec{r}_o = \vec{r}/r$  el vector unitario cuyo sentido es de  $m_1$  hacia  $m_2$ .

Resulta finalmente que

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_o$$

que es la expresión de la ley de gravitación de Newton.



► Otras propiedades de los campos conservativos

■ Los campos conservativos son campos irrotacionales.

$$\text{rot}\vec{A} = \text{rot}(-\text{grad}V) = - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

- Si un campo es irrotacional, entonces es un campo conservativo.

Como  $\text{rot}\vec{A} = 0$

$$\int_S \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S} = 0 = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

resulta que la circulación en cualquier curva cerrada es nula lo cual significa que el campo  $\vec{A}$  es conservativo.

- Relación del potencial escalar con la densidad de magnitud activa.

Si la ecuación (21) la particularizamos para un campo conservativo

$$\text{div}\vec{A} = \text{div}(-\text{grad}V) = \rho$$

y como

$$\begin{aligned} \text{div}(-\text{grad}V) &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) \\ &= -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\nabla^2 V \end{aligned}$$

a  $\nabla^2 = \Delta$  se le denomina **operador laplaciano**. Resulta entonces

$$-\nabla^2 V = \rho \quad (30)$$

expresión que se conoce como **ecuación de Poisson**.

En las regiones en que  $\rho = 0$ , la ecuación anterior se transforma en

$$\nabla^2 V = 0 \quad (31)$$

que se denomina **ecuación de Laplace**. En las regiones en que se cumple la ecuación de Laplace, al potencial se le denomina **armónico**

- **Cálculo de la función potencial**

- ▶ Método de integración

### Ejemplo 3

Dado el campo vectorial conservativo  $\vec{A} = -2xy\vec{i} - (x^2 + z^2)\vec{j} - 2yz\vec{k}$ , obtener la función potencial  $V$  tal que  $\vec{A} = -\text{grad}V$  utilizando el método de integración.

Dado que tiene que cumplirse que  $\vec{A} = -\mathbf{grad}V$ , entonces se verificará

$$A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} = - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right)$$

por consiguiente, debe verificarse que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -A_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -A_y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -A_z \quad (32)$$

Cojamos la primera de las ecuaciones (32) y sustituymos la componente x del campo por su valor,  $A_x = -2xy$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2xy$$

e integremos respecto a la variable x, considerando que en este proceso tanto la variable y como la z son constantes

$$\int dV = \int 2xy \, dx \Rightarrow V = x^2 y + f(y, z) \quad (33)$$

donde  $f(y,z)$  es la constante de integración que debe ser independiente de x pero que puede ser función tanto de y como de z.

Para determinar la forma de  $f(y,z)$ , derivamos respecto a la variable y el potencial V dado por (33)

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y}$$

y teniendo en cuenta la segunda de las ecuaciones (32)

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = -A_y = x^2 + z^2$$

es decir

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = z^2$$

y que al integrar en la variable y

$$\int f(y, z) = \int z^2 \, dy \Rightarrow f(y, z) = z^2 y + f(z)$$

Debemos darnos cuenta que  $f(y,z)$  no depende de la variable  $x$ , por lo tanto, la constante de integración no podrá depender de  $x$ , como máximo dependerá de  $z$ .

Sustituyendo el valor encontrado para  $f(y,z)$  en la expresión de  $V$  dada por (33), llegamos a

$$V = x^2y + z^2y + f(z) \quad (34)$$

Por último, para determinar la forma de  $f(z)$ , derivamos el potencial  $V$  dado por (34) respecto a la variable  $z$  y tenemos en cuenta la tercera de las ecuaciones (32)

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2zy + \frac{\partial f(z)}{\partial z} = -A_z = 2yz$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow f(z) = cte$$

resultado que al sustituir en (34) nos proporciona el valor buscado del potencial  $V$

$$V = x^2y + z^2y + cte \quad (35)$$

que como podemos ver está indeterminado por una constante. Ésta puede ser evaluada si se conoce el valor de  $V$  en un punto dado.

---

► Método de la circulación

Este método se basa en el hecho de que la circulación de un campo conservativo es independiente del camino utilizado y sólo depende del punto inicial y final.

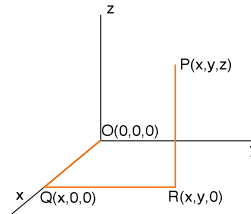
#### Ejemplo 4

Dado el campo vectorial conservativo  $\vec{A} = -2xy\vec{i} - (x^2 + z^2)\vec{j} - 2yz\vec{k}$ , obtener la función potencial  $V$  tal que  $\vec{A} = -\text{grad}V$  utilizando el método de la circulación.

De acuerdo con la ecuación (28) podemos escribir que

$$\int_O^P \vec{A} \cdot d\vec{r} = V_O - V_P$$

donde  $O(0,0,0)$  representa el origen de coordenadas y  $P(x,y,z)$  un punto genérico.



Al ser la circulación de un campo conservativo independiente de la trayectoria, y de acuerdo con la figura

$$\int_O^P \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_O^Q \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_Q^R \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_R^P \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Trayectoria OQ:  $x$  varía de 0 hasta  $x$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ ,  $d\vec{r} = dx\vec{i}$ ,  $\vec{A} \cdot d\vec{r} = A_x dx$  y como  $A_x = -2xy = 0$ , resulta

$$\int_O^Q \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_0^x A_x dx = 0$$

Trayectoria QR:  $x$  es constante,  $y$  varía de 0 hasta  $y$ ,  $z=0$ ,  $d\vec{r} = dy\vec{j}$ ,  $\vec{A} \cdot d\vec{r} = A_y dy$  y como  $A_y = -(x^2 + z^2) = -x^2$ , resulta

$$\int_Q^R \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_0^y A_y dy = -x^2 \int_0^y dy = -x^2 y$$

Trayectoria RP:  $x$  es constante,  $y$  es constante,  $z$  varía de 0 hasta  $z$ ,  $d\vec{r} = dz\vec{k}$ ,  $\vec{A} \cdot d\vec{r} = A_z dz$  y como  $A_z = -2yz$ , resulta

$$\int_R^P \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_0^z A_z dz = -2y \int_0^z dz = -z^2 y$$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en cada tramo, nos quedará

$$V_O - V_P = -x^2 y - z^2 y \Rightarrow V_P = V_O + x^2 y + z^2 y$$

resultado que está indeterminado por una constante  $V_0$ .

### Relaciones vectoriales de interés

$$\frac{d}{d\sigma}(u\vec{A}) = \frac{du}{d\sigma}\vec{A} + u\frac{d\vec{A}}{d\sigma}$$

$$\frac{d}{d\sigma}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{d\sigma} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{d\sigma}$$

$$\frac{d}{d\sigma}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{d\sigma} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{d\sigma}$$

$$\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v$$

$$\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$$

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B} \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) + \vec{A} \wedge (\nabla \wedge \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$

### Relaciones vectoriales de interés (cont.)

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$$

$$\nabla \cdot (u\vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla u) + u(\nabla \cdot \vec{A})$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \wedge \vec{B})$$

$$\nabla \wedge (\vec{A} + \vec{B}) = (\nabla \wedge \vec{A}) + (\nabla \wedge \vec{B})$$

$$\nabla \wedge (u\vec{A}) = (\nabla u) \wedge \vec{A} + u(\nabla \wedge \vec{A})$$

$$\nabla \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$